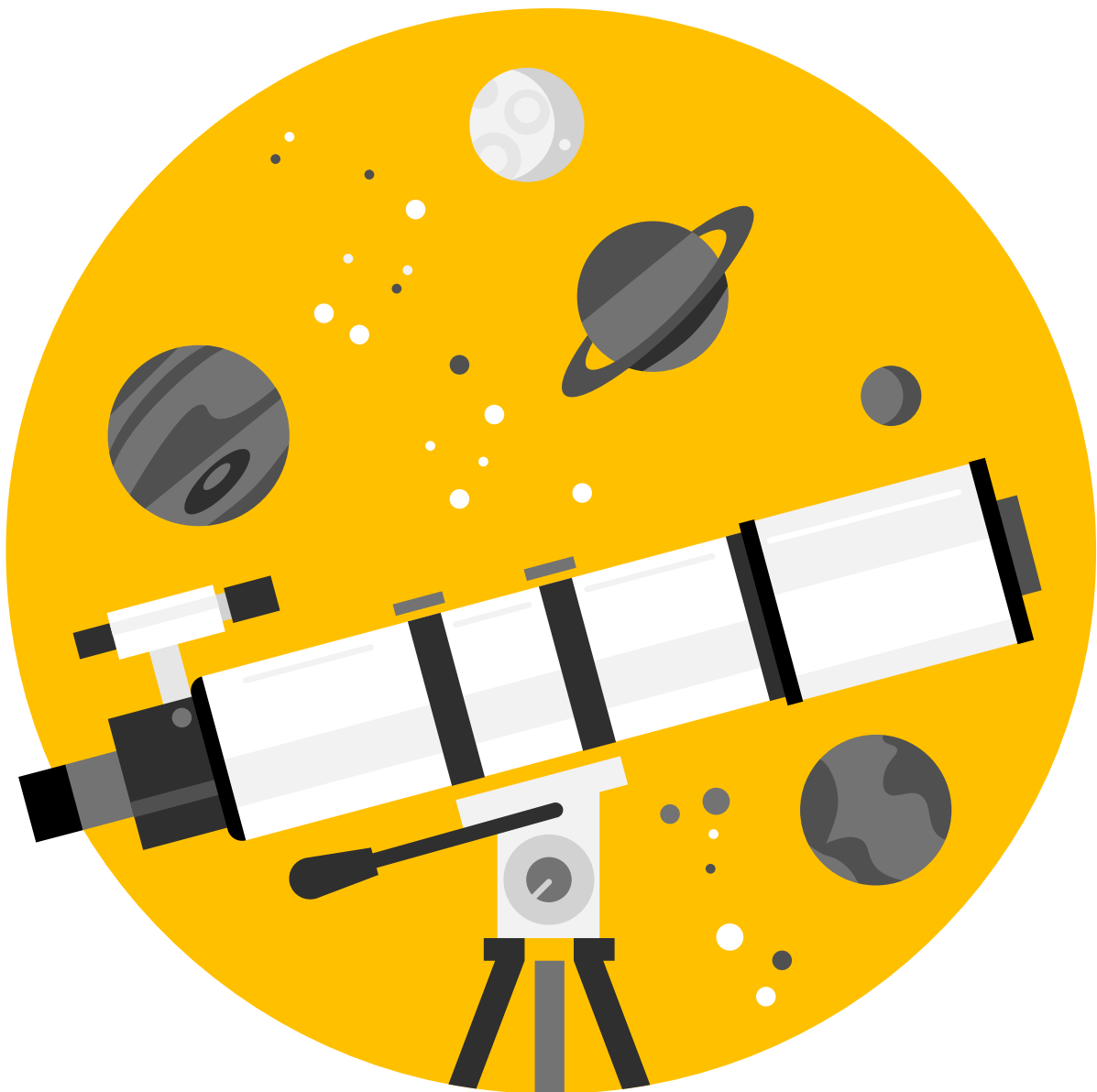


Triangulering av nordlys

Bruk av regning og måling for å finne høyde



Kort om aktiviteten

Triangulering er en teknikk som har vært mye brukt i samfunnet, blant annet til måling av høyden til nordlyset. Historisk sett har metoden vært svært viktig, særlig i landoppmåling. I dag brukes triangulering i satellittbaserte målinger, f.eks. i Global Navigation Satellite System (GNSS). Derfor er det nyttig å vite om, forstå og kunne bruke triangulering som metode.

Innhold

Kort om aktiviteten	2
Teoridel	3
Triangulering i romfysikken	3
Metode for triangulering av nordlys	4
Aktivitet 1: To-punkts triangulering	6
Aktivitet 2: Utleddning av uttrykk	7
Aktivitet 3: En enklere måte å regne ut høyden	8
Kilder	9
Lisensiering:	9
Vedlegg 1: Bruk av gradskive	10

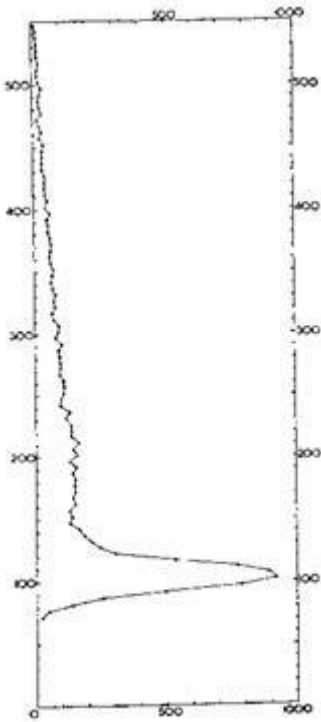
Teoridel

Triangulering er en gammel, vitenskapelig metode for å måle avstander og posisjoner basert på fjernmåling. Et eksempel er å måle avstanden til en øy ute i havet, uten mulighet for å faktisk dra til øya og gjøre målingen direkte ved å dra et måleinstrument ut dit. Hele grunnideen er at man tar målinger ved to (eller flere) steder man har tilgang til, f.eks. langs en kystlinje, og så måler vinkelen mellom linjestykket mellom de to punktene og øya man vil finne avstanden til. Ved hjelp av matematikk kan man nå regne seg til avstanden ut til fjernpunktet (øya i dette eksempelet). Dette var teknikken som ble brukt til å måle høyden til Mount Everest før folk kom seg opp til toppen. Man hadde flere referansepunkter rundt fjellet som man visste posisjonen til med høy nøyaktighet, så ved å måle forskjellige vinkler kunne man kalkulere posisjonen til toppen.

Avstandsmålinger man gjør i den virkelige verden blir aldri 100% nøyaktig. Ved å gjøre flere enn to målinger, som er et minimum, kan man finne gjennomsnittet til alle målingene for å forbedre nøyaktigheten. Denne teknikken forutsetter at alle målingene blir gjort med like god nøyaktighet i seg selv.

Triangulering i romfysikken

I tiden hvor Kristian Birkeland, Norges første nordlysforsker, begynte sine målinger av nordlyset visste man svært lite om nordlyset. Man visste ikke hva som skapte nordlyset, og man visste heller ikke i hvilken høyde det forekom. Man hadde på denne tiden, i 1890-1910, få metoder på å gjøre nordlysforskningen. Man visste at nordlyset ikke kunne være reflektert fra noe i atmosfæren, men måtte bli skapt der man så det, i himmelen over. Grunnen til dette var at man kunne måle at lyset ikke var polarisert.



Figur 1: Analyse av Carl Størmers høydemålinger. Kilde: Carl Størmer

Forskerne, med Birkeland i spissen, anså triangulering som det beste alternativet til å måle høyden i nordlyset på. De lagde to observatorier på toppen av fjell i det nordlysrike Finnmark med telefonlinje mellom de to observatoriene, så de kunne synkronisere målinger. Observatoriene var bare 3,4 km unna hverandre og egnet seg dårlig til triangulering. Det var senere når også Carl Størmer, en annen kjent og viktig nordlysforsker, jobbet med Birkeland at man fikk en rekke, gode trianguleringsdatapunkter fra flere observatorier. Dette var nok til å gjøre en statistisk beregning av posisjonen til nordlyset. Se figur 1 for den originale figuren Størmer lagde basert på sine egne beregninger/observasjoner. Sammenlikner man dette med den beregnede høydedistribusjonen brukt ved mer moderne og mer nøyaktige målinger så er trianguleringsmålingene overraskende gode!

I denne oppgaven skal vi selv prøve å regne ut et punkt, som vi kan late som er nordlyset på himmelen, med bruk av den enkle teknikken triangulering.

Metode for triangulering av nordlys

Figur 2 illustrer vinkler og avstander for metoden. Vi gjør målinger fra de to punktene A og B . Disse kan være vilkårlig valgt, men avstanden mellom dem, AB , burde være passe sett i forhold til avstanden $d = CD$. I den rettvinklede trekanten ACD er avstanden AD gitt som $AD = \frac{d}{\tan \alpha}$.

Vil vi ha det samme for avstanden BD i trekanten BCD med vinkel β . Derfor vil avstanden AB være gitt som summer av disse:

$$AB = AD + BD = \frac{d}{\tan \alpha} + \frac{d}{\tan \beta} = d \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} \right)$$

Om vi nå bruker de trigonometriske identitetene $\tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ og $\sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x) = \sin(x + y)$, så får vi

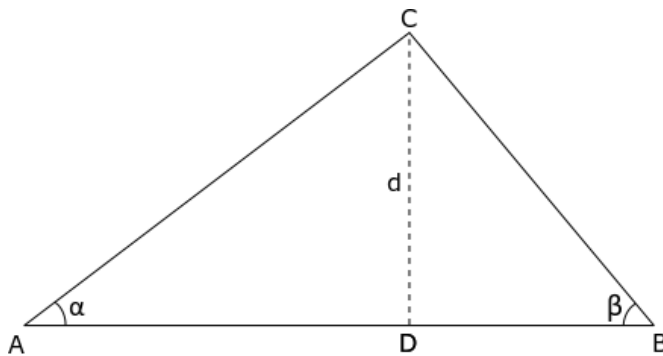
$$AB = d \left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} \right)$$

$$AB \sin(\alpha) \sin(\beta) = d(\cos(\alpha) \sin(\beta) + \cos(\beta) \sin(\alpha)) = d \sin(\alpha + \beta)$$

Til slutt ender vi dermed opp med uttrykket vi skal bruke i denne oppgaven, som er:

$$d = AB \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

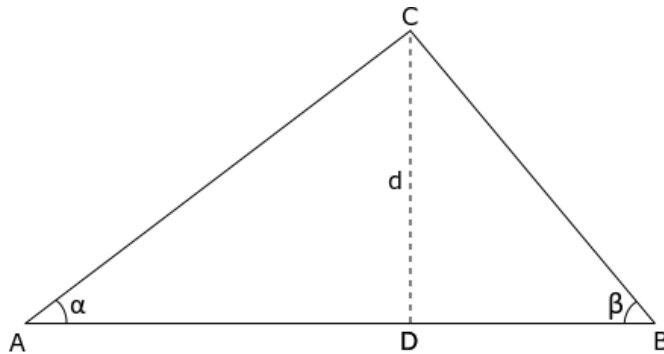
Vi ser at når vi har gitt to punkter og vi vet avstanden mellom dem, så er alt vi trenger å gjøre og måle vinklene α og β for å finne avstanden d til et tredje punkt (her kalt C).



Figur 2: Vinklene, posisjonene og lengdene i bruk ved enkel triangulering

Aktivitet 1: To-punkts triangulering

Denne oppgaven er enklest å gjøre i en gruppe av to eller flere, men kan også gjøres alene. Du har fått punktet C, og du har også fått oppgitt observasjonspunktene A og B og avstanden mellom dem, AB.



Figur 3: Vinklene, posisjonene og lengdene i bruk ved enkel triangulering.

- a) Du skal nå finne avstanden, d , fra punktet C til AB ved hjelp av triangulering, se figur 3 over.

Finn først vinklene α og β . Ved hjelp av disse vinklene kan du beregne avstanden, d , ved hjelp av uttrykket

$$d = AB \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Merk at dette er avstanden mellom punktet og det nærmeste stedet på linjen mellom de to punktene du målte. Dette punktet, D, på denne linjen er vilkårlig og har lite å si i denne sammenhengen. $CD \perp AB$

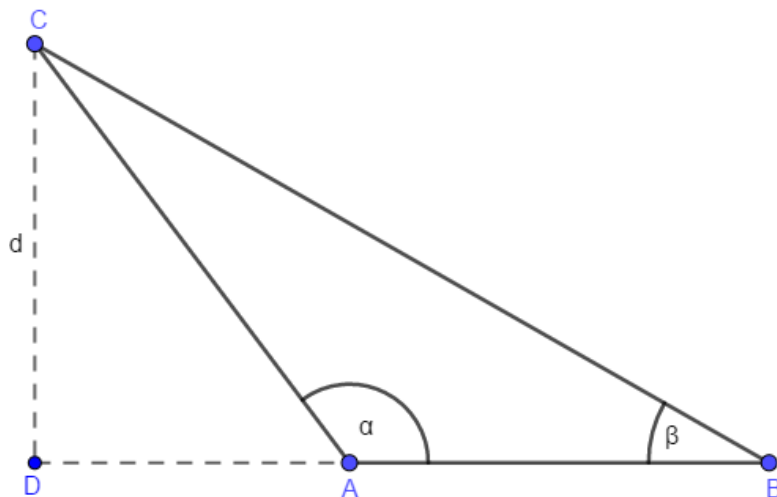
- b) Vi skal nå utvide dette noe. Finn en eller flere andre punkter på den samme linjen som du brukte i oppgave a, og mål vinklene. Du vil dermed kunne kalkulere flere mål for avstanden d , som i prinsippet burde være samme avstand. Pga. målefeil (som alltid vil forekomme) vil de likevel variere noe. Hvor mye varierer de forskjellige avstandene du kommer frem til, og hva er den gjennomsnittlige avstanden?

Aktivitet 2: Utleddning av uttrykk

I aktivitet 1 fikk du oppgitt uttrykket for å regne ut avstanden, d

$$d = AB \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

- Bruk figur 3 fra aktivitet 1 og det du kan om trigonometri til å utlede dette uttrykket.
- Punktet D ligger i skjæringspunktet mellom d og linjen gjennom punktene A og B . I figur 3 ser vi at dette punktet ligger mellom observasjonspunktene A og B . Tenkt deg nå at punktet D ikke ligger mellom disse observasjonspunktene, se figur 4 under. Undersøk nå om uttrykket for, d , fortsatt er gyldig for disse tilfellene.

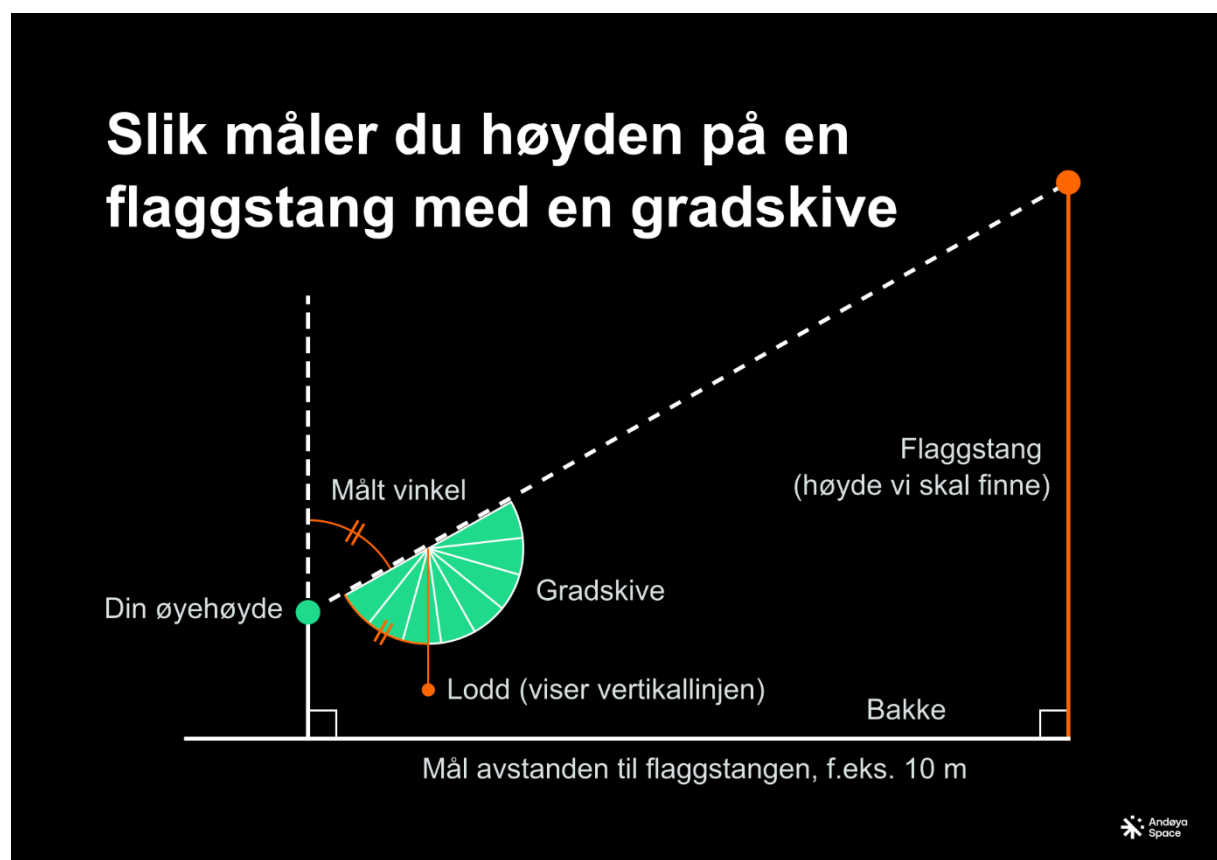


Figur 4: Når punktet D ikke ligger mellom observasjonspunktene

Aktivitet 3: En enklere måte å regne ut høyden

Hvis du ønsker å unngå trigonometri og sinus, kan du bruke en praktisk metode som passer for lavere klassetrinn som også viser prinsippet bak trigonometriske beregninger.

- Mål avstanden til objektet:** Velg for eksempel en flaggstang. Mål avstanden fra der du står til flaggstangen, for eksempel 10 meter.
- Mål din øyehøyde:** Mål høyden fra bakken opp til øynene dine, for eksempel 1 meter. Hvis nødvendig, kan du bøye deg litt ned eller sitte på noe for å få en passende høyde.
- Bruk gradskiven:** Fest et lodd i midten av gradskiven slik at det henger ned og viser vertikallinjen. Hold gradskiven foran øynene og sikt mot toppen av flaggstangen. En medhjelper kan lese av vinkelen på gradskiven. Se også vedlegg 1 for mer informasjon om bruk av gradskive på denne måten.
- Tegn opp målingen:** Bruk et ruteark eller linjert ark og velg en skala, for eksempel 1 cm = 1 meter. Tegn avstanden til flaggstangen som en horisontal linje. Marker øyehøyden, og bruk gradskiven til å tegne vinkelen fra observasjonspunktet mot toppen av flaggstangen.
- Finn høyden:** Forleng linjen til den treffer flaggstangen. Tell antall ruter eller mål med linjal for å finne høyden. Legg til din øyehøyde for å få total høyde.



Figur 5: Slik måler du høyden på en. Kilde: Andøya Space.

Kilder

Make your own Altitude Measuring Device (Altimeter):

<https://www.youtube.com/watch?v=1i6nB6yJkZI>

Measuring Height with Protractor: <https://www.youtube.com/watch?v=FzbLEAInK3A>

Lisensiering:

Dette verket er lisensiert under en [Creative Commons Navngivelse-IkkeKommersiell-IngenBearbeidelse 4.0 Internasjonal lisens \(CC BY-NC-ND 4.0\)](#).

Du kan dele dette materialet så lenge du krediterer oss, ikke bruker det kommersielt, og ikke endrer det.

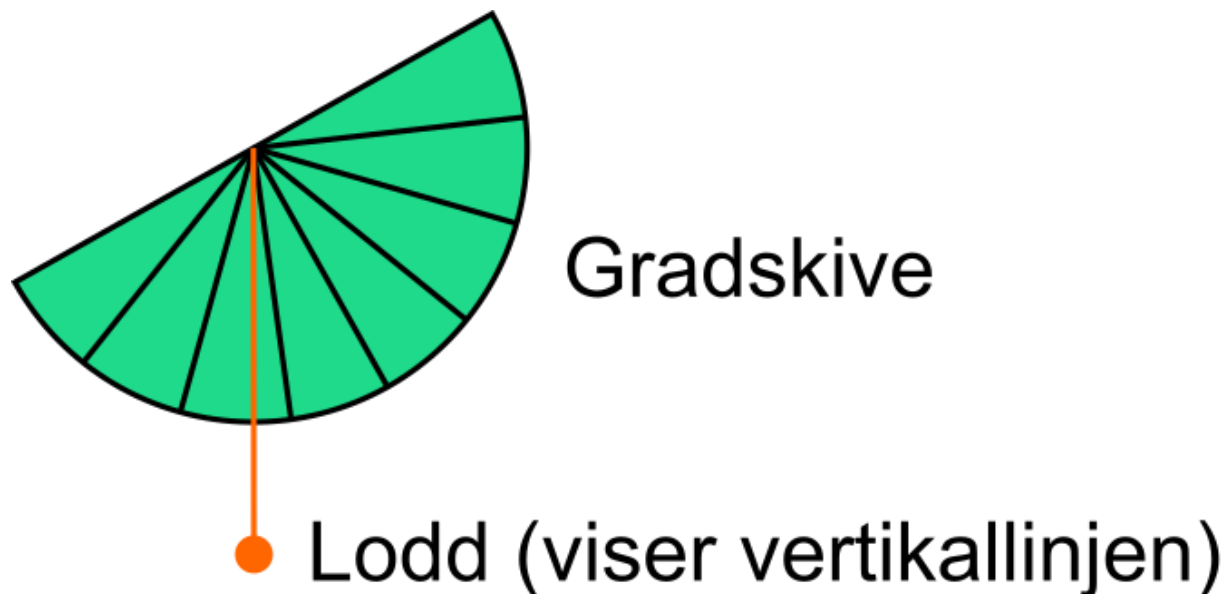
Vedlegg 1: Bruk av gradskive

Fest et lodd i den ene enden av hyssingen og teip fast andre enden i gradskiven, slik at hyssingen fritt kan rotere om origo på gradskiven. Når man så løfter gradskiven opp med en vinkel fra horisonten, vil hyssingen kunne vise vinkelen man holder den rette siden på gradskiven i forhold til horisonten da hyssingen alltid peker ned mot jordas senter. Se figur 6 under. Man kan også feste et sugerør eller liknende på den rette linjen på toppen av gradskiven, for å gjøre det enklere å sikte på objektet man måler høyden til.

Se video her for en bedre beskrivelse:

<https://www.youtube.com/watch?v=1i6nB6yJkZI>

<https://www.youtube.com/watch?v=FzbLEAlnK3A>



Figur 6: Gradskive til å måle vinkel på i feltarbeider. Illustrasjon: Andøya Space