AKTIVITET

Triangulering av nordlys

Klasseromressurs for skoleelever

Nordic esero

NAROM | ANDØYA SPACE CENTER

Kort om aktiviteten

Triangulering er en teknikk som har vært mye brukt i samfunnet, blant annet til måling av høyden til nordlyset. Historisk sett har metoden vært svært viktig, særlig i landoppmåling. I dag brukes triangulering i satellittbaserte målinger, f.eks. i Global Navigation Satellite System (GNSS). Derfor er det nyttig å vite om, forstå og kunne bruke triangulering som metode.

Mål fra Læreplanen

Stråling og radioaktivitet

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- forklare hvordan nordlys oppstår, og gi eksempler på hvordan Norge har vært og er et viktig land i forskningen på dette feltet
- forklare hvordan elektromagnetisk stråling fra verdensrommet kan tolkes og gi informasjon om verdensrommet

Innhold

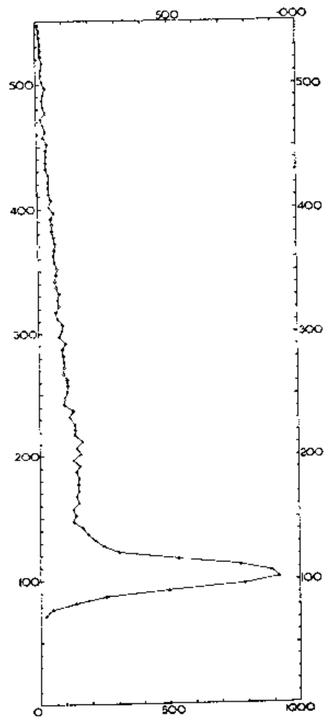
Lærerveiledning

Triangulering er en gammel, vitenskapelig metode for å måle avstander og posisjoner basert på fjernmåling. Et eksempel er å måle avstanden til en øy ute i havet, uten mulighet for å faktisk dra til øya og gjøre målingen direkte ved å dra et måleinstrument ut dit. Hele grunnideen er at man tar målinger ved to (eller flere) steder man har tilgang til, f.eks. langs en kystlinje, og så måler vinkelen mellom linjestykket mellom de to punktene og øya man vil finne avstanden til. Ved hjelp av matematikk kan man nå regne seg til avstanden ut til fjernpunktet (øya i dette eksempelet). Dette var teknikken som ble brukt til å måle høyden til Mount Everest før folk kom seg opp til toppen. Man hadde flere referansepunkter rundt fjellet som man visste posisjonen til med høy nøyaktighet, så ved å måle forskjellige vinkler kunne man kalkulere posisjonen til toppen.

Avstandsmålinger man gjør i den virkelige verden blir aldri 100% nøyaktig. Ved å gjøre flere enn to målinger, som er et minimum, kan man finne gjennomsnittet til alle målingene for å forbedre nøyaktigheten. Denne teknikken forutsetter at alle målingene blir gjort med like god nøyaktighet i seg selv.

Triangulering i romfysikken

I tiden hvor Kristian Birkeland, Norges første nordlysforsker, begynte sine målinger av nordlyset visste man svært lite om nordlyset. Man visste ikke hva som skapte nordlyset, og man visste heller ikke i hvilken høyde det forekom. Man hadde på denne tiden, i 1890-1910, få metoder på å gjøre nordlysforskningen. Man visste at nordlyset ikke kunne være reflektert fra noe i atmosfæren, men måtte bli skapt der man så det, i himmelen over. Grunnen til dette var at man kunne måle at lyset ikke var polarisert.



Figur 1: Størmers høydemålinger

Forskerne, med Birkeland i spissen, anså triangulering som det beste alternativet til å måle høyden i nordlyset på. De lagde to observatorier på toppen av fjell i det nordlysrike Finnmark med telefonlinje mellom de to observatoriene, så de kunne synkronisere målinger. Observatoriene var bare 3.4 km unna hverandre og egnet seg dårlig til triangulering. Det var senere når også Carl Størmer, en annen kjent og viktig nordlysforsker, jobbet med Birkeland at man fikk en rekke, gode trianguleringsdatapunkter fra flere observatorier. Dette var nok til å gjøre en statistisk beregning av posisjonen til nordlyset. Se figur 1 for den originale figuren Størmer lagde basert på sine egne beregninger/observasjoner. Sammenlikner man dette med den beregnede høydedistribusjonen brukt ved mer moderne og mer nøyaktige målinger så er trianguleringsmålingene overraskende gode!

I denne oppgaven skal vi selv prøve å regne ut et punkt, som vi kan late som er nordlyset på himmelen, med bruk av den enkle teknikken triangulering.

Metoden

Figur 2 illustrer vinkler og avstander for metoden. Vi gjør målinger fra de to punktene A og B. Disse kan være vilkårlig valgt, men avstanden mellom dem, AB, burde være passe sett i forhold til avstanden $d = CD$. I den rettvinklede trekanten ACD er avstanden AD gitt som $AD = \frac{d}{\tan \alpha}$.

Vil vi ha det samme for avstanden BD i trekanten BCD med vinkel β. Derfor vil avstanden AB være gitt som summer av disse:

$$AB = AD + BD = \frac{d}{\tan\ \alpha} + \frac{d}{\tan\ \beta} = d\left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta}\right)$$

Om vi nå bruker de trigonometriske identitetene $\tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ og $\sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) = \sin(x+y)$, så får vi

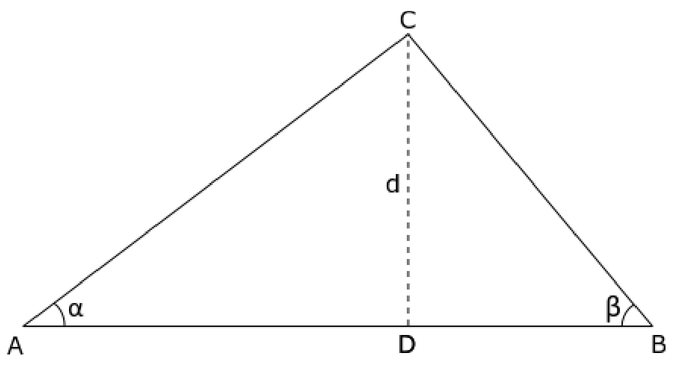
$$AB = d\left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)}\right)$$

$$AB \sin(\alpha)\sin(\beta) = d(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\beta)\sin(\alpha)) = d\sin(\alpha+\beta)$$

Til slutt ender vi dermed opp med uttrykket vi skal bruke i denne oppgaven, som er:

$$d = AB\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Vi ser at når vi har gitt to punkter og vi vet avstanden mellom dem, så er alt vi trenger å gjøre og måle vinklene α og β for å finne avstanden d til et tredje punkt (her kalt C).



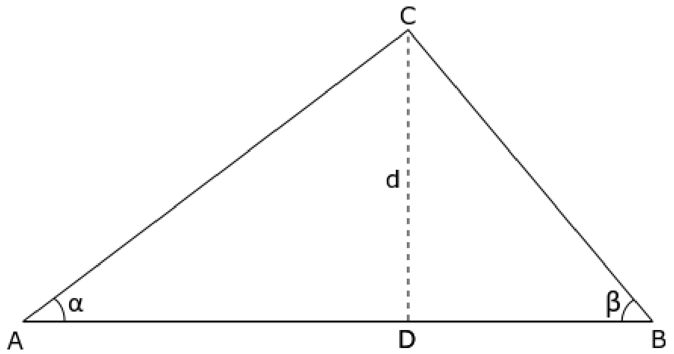
Figur 2: Vinklene, posisjonene og lengdene i bruk ved enkel triangulering

Utstyr

Hva trenger de	Hvor kan det skaffes	Mer informasjon
Målebånd	Skole	Lengde avhenger av hvor høyt/langt de skal måle
Kalkulator eller liknende verktøy	Skole	
Vinkelpistol eller gradskive	Skole	Se vedlegg for bruk av gradskive

Aktivitet 1: To-punkts triangulering

Denne oppgaven er enklest å gjøre i en gruppe av to eller flere, men kan også gjøres alene. Du har fått punktet C, og du har også fått oppgitt observasjonspunktene A og B og avstanden mellom dem, AB.



Figur 3: Vinklene, posisjonene og lengdene i bruk ved enkel triangulering

a) Du skal nå finne avstanden, *d,* fra punktet C til AB ved hjelp av triangulering, se figur 3.

   Finn først vinklene α og β. Ved hjelp av disse vinklene kan du beregne avstanden, *d,* ved hjelp av uttrykket

$$\boldsymbol{d = AB\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}}$$

   Merk at dette er avstanden mellom punktet og det nærmeste stedet på linjen mellom de to punktene du målte. Dette punktet, D, på denne linjen er vilkårlig og har lite å si i denne sammenhengen. $CD \perp AB$

b) Vi skal nå utvide dette noe. Finn en eller flere andre punkter på den samme linjen som du brukte i oppgave a, og mål vinklene. Du vil dermed kunne kalkulere flere mål for avstanden $\boldsymbol{d}$, som i prinsippet burde være samme avstand. Pga. målefeil (som alltid vil forekomme) vil de likevel variere noe. Hvor mye varierer de forskjellige avstandene du kommer frem til, og hva er den gjennomsnittlige avstanden?

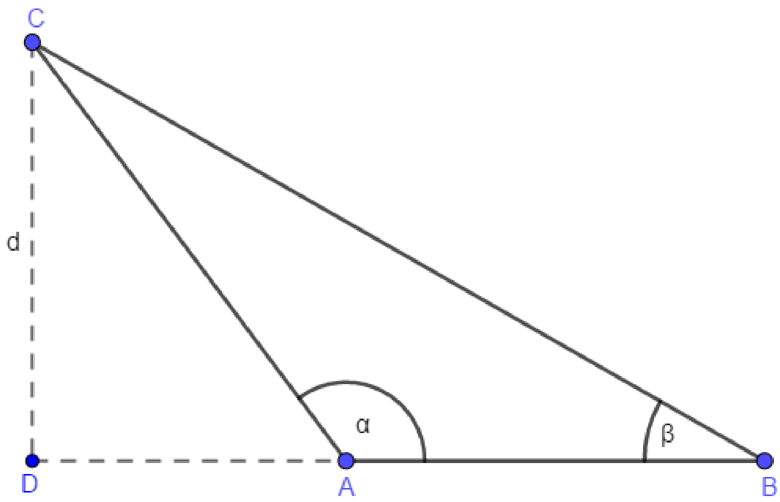
Aktivitet 2: Utledning av uttrykk

I aktivitet 1 fikk du oppgitt uttrykket for å regne ut avstanden, *d*

$$d = AB\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

a) Bruk figur 3 og det du kan om trigonometri til å utlede dette uttrykket.

b) Punktet D ligger i skjæringspunktet mellom *d* og linjen gjennom punktene *A* og *B*. I figur 3 ser vi at dette punktet ligger mellom observasjonspunktene A og B. Tenkt deg nå at punktet D ikke ligger mellom disse observasjonspunktene, se figur 4.
Undersøk nå om uttrykket for, *d*, fortsatt er gyldig for disse tilfellene.

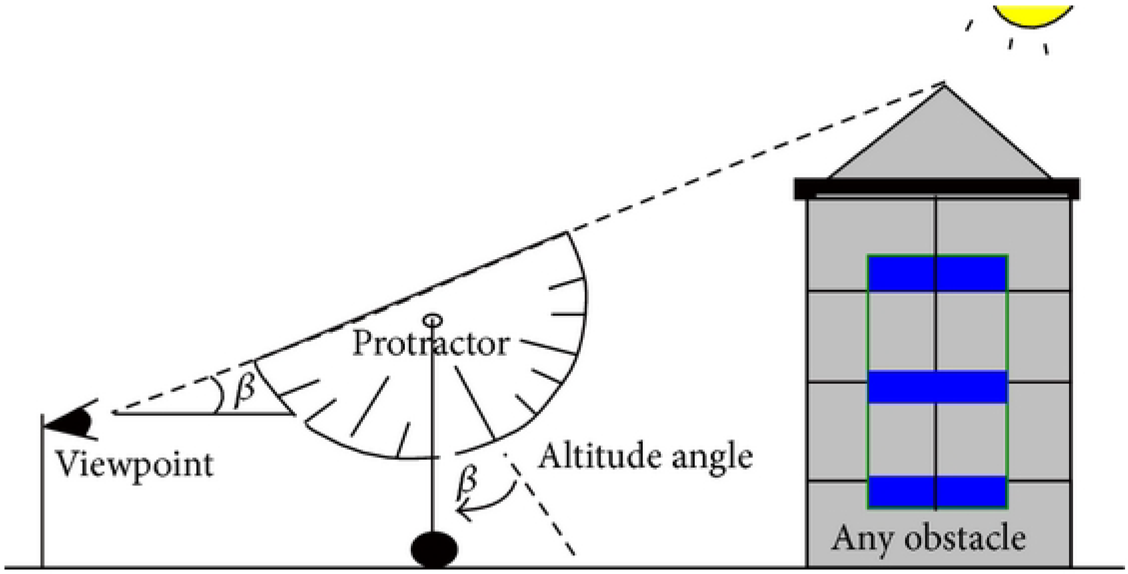


Figur 4: Når punktet D ikke ligger mellom observasjonspunktene

Aktivitet 3: For lavere nivå

Om ønskelig kan man unngå å bruke trigonometri og sinus, for å gjøre oppgaven enklere for lavere klassetrinn. Da bør man selv måle opp en gitt avstand (som man allerede vet høyden til), for eksempel opp til mønet på et hus som er ti meter. Ta utgangspunkt i punktet på bakken rett under mønet, mål videre opp en avstand derfra, la si 5 meter, til et observasjonspunkt (se figur 5). La elvene nå måle vinkelen opp til mønet fra observasjonspunktet. Elevene kan nå gå inn i en tabell der kolonne 1 viser størrelsen på vinkelen og kolonne 2 viser høyden på mønet. Denne tabellen må lages på forhånd ut i fra de gitte avstandene du velger. I vedlegg 3 kan du finne eksempel på en slik tabell. I denne tabellen tar man også utgangspunkt i at siktepunktet (beskrevet som «viewpoint» i figur 5) er fra bakken. Dersom elevene står og måler vinkelen må avstanden opp til siktepunktet legges til for å få riktig høyde.

Denne videoen gir en nærmere beskrivelse av metoden:
https://www.youtube.com/watch?v=FzbLEAInK3A



Figur 5: Hvordan bruke gradskive for å måle høyde.

Dersom du likevel ønsker å bruke metoden i aktivitet 1, men gjøre det enklere for elevene, kan du bruke tabell for sinusverdier i vedlegg 1.

Kildehenvisninger

- Innholdet er utviklet av NAROM for Nordic ESERO

Bilder

- Figur 1: Størmers høydemålinger (årstall). Bilde hentet fra
- Figur 5: Hvordan bruke gradskive. Hentet (august 2019) fra researchgate: https://www.researchgate.net/figure/Using-a-protractor-and-plumb-to-measure-altitude-angle-for-any-obstacles-such-as_fig7_271730479
  Lisens: CC BY 3.0

Vedlegg 1: Tabell med sinusverdier

På enkelte, lavere klassetrinn så har ikke elevene fått et forhold til trigonometriske funksjoner. Likevel egner denne øvelsen seg godt, da de likevel kan sette inn tall i sinusfunksjonen og ikke nødvendigvis gå dypere inn i hva sinusfunksjonen er. For å gjøre denne overgangen enda litt enklere, så har vi her laget en tabell som viser sinusverdien for forskjellige vinkler mellom 0 og 90 grader.

Husk at dette er alle verdiene man trenger å vite for hele 360 grader. Dette er fordi $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ som dekker 3. og 4. kvadrant. F.eks. er $\sin(-90^0) = -\sin(90^0) = -1$. Samtidig vil $\sin(\theta) = \sin(180^0 - \theta)$ gjelde og dekker dermed 2. kvadrant.

Vinkel i grader	sin(vinkel)
0	0
5	0.0872
10	0.1736
15	0.2588
20	0.3420
25	0.4226
30	**0.5000**
35	0.5736
40	0.6428
45	**0.7071**
50	0.7660
55	0.8192
60	**0.8660**
65	0.9063
70	0.9397
75	0.9659
80	0.9848
85	0.9962
90	**1**

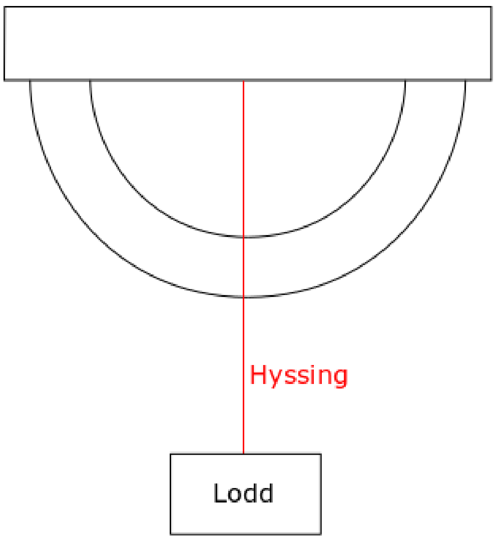
Vedlegg 2: Bruk av gradskive

En vinkelpistol er en slags gradskive med en skive utenfor med et tungt punkt, hvor man trykker inn en knapp på en slags pistolliknende holder hvor denne tunge skiven med en pil henger løst. Om man så løfter vinkelpistolen oppover vil denne skiven rotere rundt «gradskiven», og når man da slipper knappen vil denne løsthengende skiven låses. Siden den roterende skiven hadde et tungt punkt på seg vil alltid dette punktet henge ned, og når den låses vil man kunne lese vinkelen pistolen hadde fra horisontalen.

Ikke alle skoler har tilgang til denne, men man kan lage en enklere versjon ved bruk av gradskive, litt hyssing og en stein eller liknende som fungerer som lodd. Fest et lodd i den ene enden av hyssingen og teip fast andre enden i gradskiven, slik at hyssingen fritt kan rotere om origo på gradskiven. Når man så løfter gradskiven opp med en vinkel fra horisonten, vil hyssingen kunne vise vinkelen man holder den rette siden på gradskiven i forhold til horisonten da hyssingen alltid peker ned mot jordas senter. Se figur 6. Man kan også feste et sugerør eller liknende på den rette linjen på toppen av gradskiven, for å gjøre det enklere å sikte på objektet man måler høyden til.

Se video her for en bedre beskrivelse:
https://www.youtube.com/watch?v=1i6nB6yJkZI

https://www.youtube.com/watch?v=FzbLEAInK3A



Figur 6: Gradskive til å måle vinkel på i feltarbeider

Vedlegg 3: Tabell til aktivitet 3

Her er eksempel på en tabell til bruk i oppgave 3. Her har man tatt utgangspunkt i at elevene har målt vinkelen fra 3 meter, 5 meter eller 10 meter og de tre siste kolonnen gir høyde for disse avstandene.

De tre siste kolonnene er beregnet ut fra formelen under:

$$H = x \cdot \tan(\alpha)$$

der *H = høyde*, *x = avstand til observasjonspunkt* (langs bakken) og $\alpha = vinkel$

Vinkel i grader	Høyde i meter, målt fra 3 meters hold	Høyde i meter, målt fra 5 meters hold	Høyde i meter, målt fra 10 meters hold
0	0,00	0	0,00
5	0,26	0,44	0,87
10	0,53	0.88	1,76
15	0,80	1,34	2,68
20	1,09	1,82	3,64
25	1,40	2,33	4,66
30	1,73	2,89	5,77
35	2,10	3,50	7,00
40	2,52	4,20	8,39
45	3,00	5,00	10,00
50	3,58	5,96	11,92
55	4,28	7,14	14,28
60	5,20	8,66	17,32
65	6,43	10,72	21,45
70	8,24	13,74	27,47
75	11,20	18,66	37,32
80	17,01	28,36	56,71
85	34,29	57,15	114,30